Series $HKP25/C

SET~1

Code No. **65/1/1**

Roll No.							

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

NOTE :

(i) Please check that this question paper contains **9** printed pages.

(ii) Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.

(iii) Please check that this question paper contains **38** questions.

(iv) Please write down the serial number of the question in the answer-book before attempting it.

(v) 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

MATHEMATICS

Time allowed : 3 hours *Maximum Marks : 80*

General Instructions :

Read the following instructions very carefully and strictly follow them :

*(a) This question paper contains **two** parts — A and B. Each part is **compulsory**. Part A carries **24** marks and part B carries **56** marks.*

(b) Part A has objective type questions and part B has descriptive type questions.

Part A : (Objective Type Questions)

*(i) It consists of **two** sections – I and II.*

*(ii) Section – I comprises of **16** very short answer type questions with choices in 5 questions. Each question is of **1** mark.*

*(iii) Section – II contains **2** case studies. Each comprises of 5 MCQs. You are to attempt any **4** out of 5 MCQs. Each MCQ is of **1** mark.*

Part B : (Descriptive Type Questions)

*(i) It consists of **three** sections – III, IV and V.*

*(ii) Section – III comprises of **10** questions of **2** marks each.*

*(iii) Section – IV comprises of **7** questions of **3** marks each.*

*(iv) Section – V comprises of **3** questions of **5** marks each.*

*(v) Internal choice is provided in 3 questions of Section – III, 2 questions of Section – IV and 3 questions of Section – V. You are to attempt only **one alternative** in all such questions.*

PART A

(Section – I)

*Question numbers **1** to **16** carry **1** mark each.* *16×1=16*

1. If A is a square matrix of order 3 such that $A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, then find $|A|$. *1*

2. (a) Find the order of the matrix A such that

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{bmatrix}.$$ *1*

OR

(b) If $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ and $A + 2B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$, find the matrix A. *1*

3. Write the smallest reflexive relation on set A = {a, b, c}. *1*

4. (a) Find :

$$\int e^x \left(\log \sqrt{x} + \frac{1}{2x} \right) dx$$ *1*

OR

(b) Find :

$$\int e^{2 \log x} \, dx$$ *1*

5. (a) Find the angle between the vectors $\hat{i} - \hat{j}$ and $\hat{j} - \hat{k}$. *1*

OR

(b) Write the projection of the vector $\vec{r} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}$ on (i) x-axis, and (ii) y-axis. *1*

6. If $\vec{a} = \alpha\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ and $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - \beta\hat{k}$, find the value of α and β so that $\vec{a}$ and $\vec{b}$ may be collinear. *1*

7. If f = {(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, k)} is a one-one function from set A to A, where A = {1, 2, 3, 4}, then find the value of k. *1*

8. (a) Check whether the relation R defined on the set {1, 2, 3, 4} as R = {(a, b) : b = a + 1} is transitive. Justify your answer. *1*

OR

(b) If the relation R on the set A = {x : 0 ≤ x ≤ 12} given by R = {(a, b) : a = b} is an equivalence relation, then find the set of all elements related to 1. *1*

9. If $A = [1 \quad 0 \quad 4]$ and $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, find AB. *1*

10. (a) Write the order and degree of the differential equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2 \log\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$ *1*

OR

(b) Find the general solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = a$, where a is an arbitrary constant. *1*

11. Show that the function $f(x) = \frac{3}{x} + 7$ is strictly decreasing for $x \in R - \{0\}$. *1*

12. Find the magnitude of vector $\vec{a}$ given by $\vec{a} = (\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) \times (-\hat{i} + 3\hat{k})$. *1*

13. Write the equation of the plane that cuts the coordinate axes at (2, 0, 0), (0, 4, 0) and (0, 0, 7). *1*

14. Find the distance between the two parallel planes $3x + 5y + 7z = 3$ and $9x + 15y + 21z = 12$. *1*

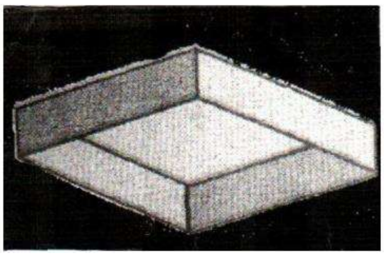
15. If A and B are two independent events and $P(A) = \frac{1}{3}$ and $P(B) = \frac{1}{2}$, find $P(\bar{A} \mid \bar{B})$. *1*

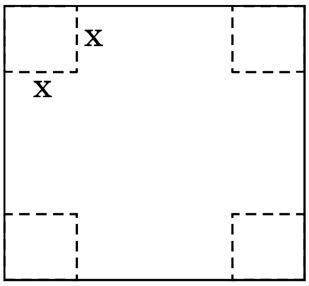
16. A coin is tossed once. If head comes up, a die is thrown, but if tail comes up, the coin is tossed again. Find the probability of obtaining head and number 6. *1*

(Section – II)

*Both the case study based questions (17 & 18) are compulsory. Attempt any **4** subparts out of **5** from each of question numbers **17** and **18**. Each subpart carries **1** mark.*

17. A factory makes an open cardboard box for a jewellery shop from a square sheet of side 18 cm by cutting off squares from each corner and folding up the flaps.





Based on the above information, answer ***any four*** of the following ***five*** questions, if x is the length of each square cut from corners : *4×1=4*

(i) The volume of the open box is :

(A) $4x(x^2 - 18x + 81)$

(B) $2x(2x^2 + 36x + 162)$

(C) $2x(2x^2 + 36x - 162)$

(D) $4x(x^2 + 18x + 81)$

(ii) The condition for the volume (V) to be maximum is :

(A) $\frac{dV}{dx} = 0$ and $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$

(B) $\frac{dV}{dx} = 0$ and $\frac{d^2V}{dx^2} > 0$

(C) $\frac{dV}{dx} > 0$ and $\frac{d^2V}{dx^2} = 0$

(D) $\frac{dV}{dx} < 0$ and $\frac{d^2V}{dx^2} = 0$

(iii) What should be the side of square to be cut off so that the volume is maximum ?

(A) 6 cm

(B) 9 cm

(C) 3 cm

(D) 4 cm

(iv) Maximum volume of the open box is :

(A) 423 cm^3

(B) 432 cm^3

(C) 400 cm^3

(D) 216 cm^3

(v) The total area of the removed squares is :

(A) 324 cm^2

(B) 144 cm^2

(C) 36 cm^2

(D) 64 cm^2

18. In answering a multiple choice test for class XII, a student either knows or guesses or copies the answer to a multiple choice question with four choices. The probability that he makes a guess is $\frac{1}{3}$ and the probability that he copies the answer is $\frac{1}{6}$. The probability that his answer is correct given that he copied is $\frac{1}{8}$.
Let E_1, E_2, E_3 be the events that the student guesses, copies or knows the answer respectively and A is the event that the student answers correctly.

Based on the above information, answer ***any four*** of the following ***five*** questions : *4×1=4*

(i) What is the probability that the student knows the answer ?

(A) 1

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{1}{4}$

(ii) What is the probability that he answers correctly given that he knew the answer ?

(A) 1

(B) 0

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{8}$

(iii) What is the probability that he answers correctly given that he had made a guess ?

(A) $\frac{1}{4}$

(B) 0

(C) 1

(D) $\frac{1}{8}$

(iv) What is the probability that he knew the answer to the question, given that he answered it correctly ?

(A) $\frac{24}{29}$

(B) $\frac{4}{29}$

(C) $\frac{1}{29}$

(D) $\frac{3}{29}$

(v) $\sum_{k=1}^{3} P(E_k \mid A)$ is :

(A) 0

(B) $\frac{1}{3}$

(C) 1

(D) $\frac{11}{8}$

PART B
(Section – III)

Question numbers ***19*** *to* ***28*** *carry* ***2*** *marks each.* *10×2=20*

19. A random variable X has the probability distribution :

X :	0	1	2	3	4
P(X) :	0	K	4K	3K	2K

Find the value of K and $P(X \le 2)$. *2*

20. Simplify $\sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2 - 1}\right), 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. *2*

21. If the matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 - 5x \\ x^2 & x + 3 \end{bmatrix}$ is symmetric, find the values of x. *2*

22. (a) Find the relationship between a and b so that the function f defined by

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{if} \quad x \le 3 \\ bx + 3 & \text{if} \quad x > 3 \end{cases}$$

is continuous at x = 3. *2*

OR

(b) Check the differentiability of $f(x) = |x - 3|$ at x = 3. *2*

23. Find :

$$\int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}\, dx$$ *2*

24. (a) Evaluate :

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x|}{x}\, dx$$ *2*

OR

(b) Evaluate :

$$\int_{0}^{\pi/2} \log\left(\frac{4 + 3\sin x}{4 + 3\cos x}\right) dx$$ *2*

25. Find the integrating factor of $x\frac{dy}{dx} + (1 + x \cot x)\, y = x$. *2*

26. If $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ are three mutually perpendicular unit vectors, find the value of $|\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}|$. *2*

27. If the sides AB and BC of a parallelogram ABCD are represented as vectors $\vec{AB} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ and $\vec{BC} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, then find the unit vector along diagonal AC. *2*

28. (a) Using integration, find the area bounded by the curve $y^2 = 4x$, y-axis and $y = 3$. *2*

OR

(b) Using integration, find the area of the region bounded by the line $2y = -x + 8$, x-axis, $x = 2$ and $x = 4$. *2*

(Section – IV)

*Question numbers **29** to **35** carry **3** marks each.* *7×3=21*

29. Show that the function $f : R - \{-1\} \rightarrow R - \{1\}$ given by $f(x) = \frac{x}{x+1}$ is bijective. *3*

30. (a) If $x = a \cos \theta + b \sin \theta$, $y = a \sin \theta - b \cos \theta$,

then show that $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

and hence show that

$$y^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0.$$ *3*

OR

(b) If $e^{y-x} = y^x$, prove that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1 + \log y)}{x \log y}$$ *3*

31. Differentiate $\sin^2 x$ w.r.t. $e^{\cos x}$. *3*

32. (a) Find the equation of the normal to the curve $y^2 = 4ax$ at $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$. *3*

OR

(b) Find the equation of the tangent to the curve $y(1 + x^2) = 2 - x$, where it crosses x-axis. *3*

33. Find :

$$\int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)^2} \, dx$$ *3*

34. If the solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2}{2x^2}$ is $\frac{ax}{y} = b \log |x| + C$, find the value of a and b. *3*

35. Using integration, find the area bounded by the circle $x^2 + y^2 = 9$. *3*

(Section – V)

*Question numbers **36** to **38** carry **5** marks each.* *3×5=15*

36. (a) If $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, find A^{-1}.

Hence, solve the following system of equations :

$3x + 4y + 2z = 8$

$2y - 3z = 3$

$x - 2y + 6z = -2$ *5*

OR

(b) If $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, find $(AB)^{-1}$. *5*

37. (a) Find the shortest distance between the following lines :

$\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ and $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ *5*

OR

(b) Find the distance of the point (– 1, – 5, – 10) from the point of intersection of the line $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ and the plane $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$. *5*

38. (a) Solve the following linear programming problem graphically :

Maximise $z = 3x + 9y$

subject to constraints

$x + 3y \leq 60$

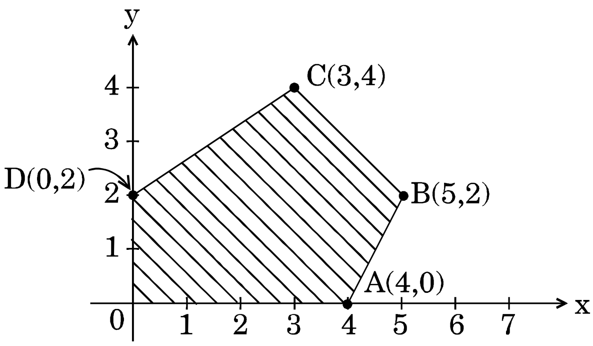
$x + y \geq 10$

$x \leq y$

$x, y \geq 0$ *5*

OR

(b) The corner points of the feasible region determined by the system of linear inequations are as shown below :



Answer each of the following :

(i) Let $z = 13x - 15y$ be the objective function. Find the maximum and minimum values of z and also the corresponding points at which the maximum and minimum values occur.

(ii) Let $z = kx + y$ be the objective function. Find k, if the value of z at A is same as the value of z at B. *5*

रोल नं.

SET~1

कोड नं. 65/1/1

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

नोट :

(i) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **9** हैं ।

(ii) प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।

(iii) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **38** प्रश्न हैं ।

(iv) कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, उत्तर-पुस्तिका में प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।

(v) इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।

गणित

निर्धारित समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 80*

सामान्य निर्देश :

निम्नलिखित निर्देशों को बहुत सावधानी से पढ़िए और उनका सख़्ती से पालन कीजिए :

(a) *इस प्रश्न-पत्र में **दो** भाग — क तथा ख हैं । प्रत्येक भाग **अनिवार्य** है । भाग क के **24** अंक तथा भाग ख के **56** अंक हैं ।*

(b) *भाग क में वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं तथा भाग ख में विवरणात्मक प्रश्न हैं ।*

भाग क : (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(i) *इस भाग में **दो** खण्ड – I तथा II हैं ।*

(ii) *खण्ड – I में **16** अति लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, जिनमें 5 प्रश्नों में विकल्प दिए गए हैं । प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है ।*

(iii) *खण्ड – II में **2** विवरण अध्ययन प्रकार के प्रश्न हैं । प्रत्येक में 5 बहुविकल्पीय प्रश्न हैं जिनमें से **4** हल करने हैं । प्रत्येक बहुविकल्पीय प्रश्न **1** अंक का है ।*

भाग ख : (विवरणात्मक प्रश्न)

(i) *इस भाग में **तीन** खण्ड – III, IV तथा V हैं ।*

(ii) *खण्ड – III में **10** प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक के **2** अंक हैं ।*

(iii) *खण्ड – IV में **7** प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक के **3** अंक हैं ।*

(iv) *खण्ड – V में **3** प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक के **5** अंक हैं ।*

(v) *खण्ड – III में 3 प्रश्नों में, खण्ड – IV में 2 प्रश्नों में तथा खण्ड – V में 3 प्रश्नों में आंतरिक विकल्प दिए गए हैं । ऐसे सभी प्रश्नों में से **एक विकल्प** हल करना है ।*

भाग क

(खण्ड – I)

*प्रश्न संख्या **1** से **16** तक प्रत्येक प्रश्न का **1** अंक है ।* *16×1=16*

1. यदि A कोटि 3 का एक वर्ग आव्यूह है जिसके लिए $A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ है, तो $|A|$ ज्ञात कीजिए । *1*

2. (a) आव्यूह A, जिसके लिए $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{bmatrix}$ है, की कोटि ज्ञात कीजिए । *1*

अथवा

(b) यदि $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ तथा $A + 2B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ हो, तो आव्यूह A ज्ञात कीजिए । *1*

3. समुच्चय A = {a, b, c} पर परिभाषित सबसे छोटा स्वतुल्य संबंध लिखिए । *1*

4. (a) ज्ञात कीजिए :

$$\int e^x \left(\log \sqrt{x} + \frac{1}{2x} \right) dx$$ *1*

अथवा

(b) ज्ञात कीजिए :

$$\int e^{2 \log x} \, dx$$ *1*

5. (a) सदिशों $\hat{i} - \hat{j}$ और $\hat{j} - \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए । *1*

अथवा

(b) सदिश $\vec{r} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}$ का (i) x-अक्ष पर प्रक्षेप, एवं (ii) y-अक्ष पर प्रक्षेप लिखिए । *1*

6. α और β के मान ज्ञात कीजिए, यदि सदिश $\vec{a} = \alpha\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - \beta\hat{k}$ संरेखीय हैं । *1*

7. यदि समुच्चय A = {1, 2, 3, 4} पर फलन f = {(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, k)} एकैकी हो (समुच्चय A से A तक), तो k का मान ज्ञात कीजिए । *1*

8. (a) जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय {1, 2, 3, 4} पर परिभाषित संबंध R = {(a, b) : b = a + 1} संक्रामक है । अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए । *1*

अथवा

(b) यदि समुच्चय $A = \{x : 0 \le x \le 12\}$ में संबंध R = {(a, b) : a = b} द्वारा परिभाषित एक तुल्यता संबंध है, तो 1 से संबंधित सभी अवयवों का समुच्चय ज्ञात कीजिए । *1*

9. यदि $A = [1 \quad 0 \quad 4]$ और $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ हो, तो AB ज्ञात कीजिए । *1*

10. (a) अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2 \log\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

की कोटि एवं घात लिखिए । *1*

अथवा

(b) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = a$, जहाँ a एक स्वेच्छ अचर है, का व्यापक हल ज्ञात कीजिए । *1*

11. दर्शाइए कि फलन $f(x) = \frac{3}{x} + 7,\ x \in R - \{0\}$ के लिए निरंतर ह्रासमान है । *1*

12. सदिश $\vec{a} = (\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) \times (-\hat{i} + 3\hat{k})$ का परिमाण ज्ञात कीजिए । *1*

13. निर्देशांक अक्षों के बिन्दुओं (2, 0, 0), (0, 4, 0) तथा (0, 0, 7) पर काटने वाले समतल का समीकरण लिखिए । *1*

14. दो समांतर समतलों $3x + 5y + 7z = 3$ एवं $9x + 15y + 21z = 12$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए । *1*

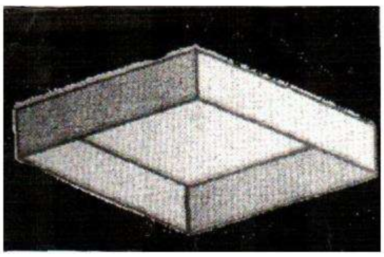
15. यदि A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं और $P(A) = \frac{1}{3}$ तथा $P(B) = \frac{1}{2}$ हो, तो $P(\bar{A} \mid \bar{B})$ ज्ञात कीजिए । *1*

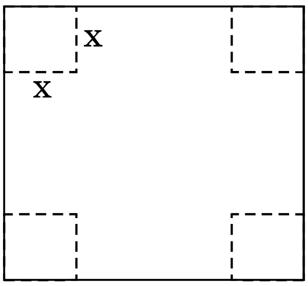
16. एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है । यदि चित आता है, तो एक पासा फेंका जाता है, परन्तु यदि पट आता है, तो उसी सिक्के को दुबारा उछाला जाता है । चित और 6 की संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । *1*

(खण्ड – II)

*दोनों विवरण अध्ययन प्रश्न (17 व 18) अनिवार्य हैं । प्रश्न संख्या **17** व **18** में प्रत्येक में दिए **5** उपभागों में से कोई **4** हल करने हैं । प्रत्येक उपभाग **1** अंक का है ।*

17. एक फैक्टरी, गहनों की दुकान के लिए, ऊपर से खुला गत्ते का एक डिब्बा बनाने के लिए 18 cm भुजा के गत्ते के वर्गाकार टुकड़े से प्रत्येक कोने पर एक वर्ग काट कर, इस प्रकार बने गत्ते के फलकों को मोड़ देती है ।





उपर्युक्त सूचना के आधार पर, निम्न ***पाँच*** प्रश्नों में से ***किन्हीं चार*** के उत्तर दीजिए, यदि कोनों से कटे प्रत्येक वर्ग की भुजा की लम्बाई x है : *4×1=4*

(i) ढक्कन रहित (खुले) डिब्बे का आयतन है :

(A) $4x (x^2 - 18x + 81)$

(B) $2x (2x^2 + 36x + 162)$

(C) $2x (2x^2 + 36x - 162)$

(D) $4x (x^2 + 18x + 81)$

(ii) आयतन (V) के अधिकतमीकरण की शर्त है :

(A) $\frac{dV}{dx} = 0$ और $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$

(B) $\frac{dV}{dx} = 0$ और $\frac{d^2V}{dx^2} > 0$

(C) $\frac{dV}{dx} > 0$ और $\frac{d^2V}{dx^2} = 0$

(D) $\frac{dV}{dx} < 0$ और $\frac{d^2V}{dx^2} = 0$

(iii) काटे जाने वाले वर्ग की भुजा कितनी होनी चाहिए, जिससे आयतन अधिकतम हो ?

(A) 6 cm

(B) 9 cm

(C) 3 cm

(D) 4 cm

(iv) खुले डिब्बे का अधिकतम आयतन है :

(A) 423 cm^3

(B) 432 cm^3

(C) 400 cm^3

(D) 216 cm^3

(v) काटे गए वर्गों का कुल क्षेत्रफल है :

(A) 324 cm^2

(B) 144 cm^2

(C) 36 cm^2

(D) 64 cm^2

18. कक्षा XII की चार विकल्पों वाले एक बहुविकल्पी परीक्षा में उत्तर देने में एक विद्यार्थी या तो प्रश्न का उत्तर जानता है या वह अनुमान लगाता है और या नकल करता है । मान लीजिए उसके अनुमान लगाने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ तथा नकल करने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है । नकल से सही उत्तर देने की प्रायिकता $\frac{1}{8}$ है ।

माना घटनाएँ E_1, E_2, E_3, A निम्न प्रकार हैं :

E_1 : विद्यार्थी अनुमान लगाता है

E_2 : विद्यार्थी नकल करता है

E_3 : विद्यार्थी उत्तर जानता है

A : विद्यार्थी का उत्तर सही होता है ।

उपर्युक्त सूचना पर आधारित निम्न ***पाँच*** प्रश्नों में से ***किन्हीं चार*** के उत्तर दीजिए : $4 \times 1 = 4$

(i) विद्यार्थी के उत्तर जानने की प्रायिकता क्या है ?

(A) 1

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{1}{4}$

(ii) दिया गया है कि विद्यार्थी उत्तर जानता है, तब उत्तर के सही होने की प्रायिकता क्या है ?

(A) 1

(B) 0

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{8}$

(iii) दिया गया है कि विद्यार्थी अनुमान लगाता है, तब भी उत्तर के सही होने की प्रायिकता क्या होगी ?

(A) $\frac{1}{4}$

(B) 0

(C) 1

(D) $\frac{1}{8}$

(iv) उत्तर के सही होने पर, विद्यार्थी के प्रश्न का उत्तर जानने कि प्रायिकता क्या होगी ?

(A) $\frac{24}{29}$

(B) $\frac{4}{29}$

(C) $\frac{1}{29}$

(D) $\frac{3}{29}$

(v) $\sum_{k=1}^{3} P(E_k \mid A)$ है :

(A) 0

(B) $\frac{1}{3}$

(C) 1

(D) $\frac{11}{8}$

भाग ख

(खण्ड – III)

*प्रश्न संख्या **19** से **28** तक प्रत्येक प्रश्न के **2** अंक हैं ।* *10×2=20*

19. एक यादृच्छया चर X का प्रायिकता बंटन निम्न है :

X :	0	1	2	3	4
P(X) :	0	K	4K	3K	2K

K का मान एवं $P(X \leq 2)$ ज्ञात कीजिए । 2

20. $\sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2 - 1}\right), 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ को सरल कीजिए । 2

21. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 6-5x \\ x^2 & x+3 \end{bmatrix}$ सममित है, तो x के मान ज्ञात कीजिए । 2

22. (a) यदि फलन f, जो निम्न रूप में परिभाषित है, x = 3 पर संतत है, तो a तथा b के बीच संबंध को ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{यदि} \quad x \leq 3 \\ bx + 3 & \text{यदि} \quad x > 3 \end{cases}$$ 2

अथवा

(b) x = 3 पर फलन $f(x) = |x - 3|$ के अवकलनीय होने की जाँच कीजिए । 2

23. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \, dx$$ 2

24. (a) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x|}{x} \, dx$$ 2

अथवा

(b) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{0}^{\pi/2} \log\left(\frac{4 + 3\sin x}{4 + 3\cos x}\right) dx$$ 2

25. $x\frac{dy}{dx} + (1 + x\cot x)\, y = x$ का समाकलन-गुणक ज्ञात कीजिए । 2

26. यदि $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन परस्पर लंबवत् मात्रक सदिश हैं, तो $|\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}|$ का मान ज्ञात कीजिए । 2

27. यदि एक समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाएँ AB तथा BC, सदिश $\vec{AB} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा $\vec{BC} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ द्वारा निरूपित की जाती हैं, तो विकर्ण AC के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए । *2*

28. (a) समाकलन विधि के प्रयोग से, वक्र $y^2 = 4x$, y-अक्ष और रेखा $y = 3$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । *2*

अथवा

(b) समाकलन विधि के प्रयोग से, रेखा $2y = -x + 8$, x-अक्ष, $x = 2$ एवं $x = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । *2*

(खण्ड – IV)

*प्रश्न संख्या **29** से **35** तक प्रत्येक प्रश्न के **3** अंक हैं ।* *7×3=21*

29. सिद्ध कीजिए कि नीचे परिभाषित फलन $f : R - \{-1\} \to R - \{1\}$, एकैकी आच्छादक फलन है :

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$ *3*

30. (a) यदि $x = a \cos \theta + b \sin \theta$, $y = a \sin \theta - b \cos \theta$ है,

तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$,

अतः दर्शाइए कि

$$y^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0.$$ *3*

अथवा

(b) यदि $e^{y-x} = y^x$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1+\log y)}{x \log y}$$ *3*

31. $e^{\cos x}$ के सापेक्ष, $\sin^2 x$ का अवकलन कीजिए । *3*

32. (a) वक्र $y^2 = 4ax$ के बिन्दु $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए । *3*

अथवा

(b) वक्र $y(1 + x^2) = 2 - x$ जिस बिन्दु पर x-अक्ष को काटती है, उस पर स्पर्श-रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए । *3*

33. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)^2} \, dx$$ *3*

34. यदि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2}{2x^2}$ का हल $\frac{ax}{y} = b \log |x| + C$ है, तो a और b के मान ज्ञात कीजिए । 3

35. समाकलन विधि के प्रयोग से, वृत्त $x^2 + y^2 = 9$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 3

(खण्ड – V)

*प्रश्न संख्या **36** से **38** तक प्रत्येक प्रश्न के **5** अंक हैं ।* *3×5=15*

36. (a) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए ।

अतः निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$3x + 4y + 2z = 8$

$2y - 3z = 3$

$x - 2y + 6z = -2$ 5

अथवा

(b) यदि $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो $(AB)^{-1}$ ज्ञात कीजिए । 5

37. (a) निम्न रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ तथा $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ 5

अथवा

(b) रेखा $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ एवं समतल $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु और बिन्दु $(-1, -5, -10)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए । 5

38. (a) निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

व्यवरोधों

$x + 3y \le 60$

$x + y \ge 10$

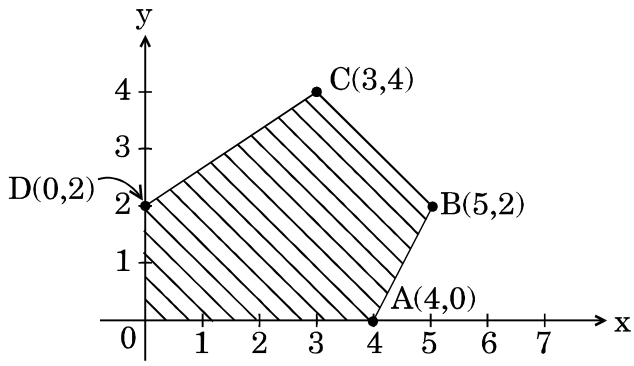
$x \le y$

$x, y \ge 0$ 5

के अंतर्गत $z = 3x + 9y$ का अधिकतमीकरण कीजिए ।

अथवा

(b) रैखिक असमिकाओं के निकाय से निर्धारित सुसंगत क्षेत्र के कोनीय बिन्दु निम्न आकृति में दिखाए गए हैं :



निम्न में प्रत्येक का उत्तर दीजिए :

(i) माना $z = 13x - 15y$ एक उद्देश्य फलन है । z का अधिकतम एवं न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए और वे कोनीय बिन्दु भी ज्ञात कीजिए जिन पर अधिकतम और न्यूनतम मान स्थित हैं ।

(ii) माना $z = kx + y$ एक उद्देश्य फलन है । k का मान ज्ञात कीजिए, यदि z का मान कोने A एवं B पर एक समान है । *5*