Series ONS **SET-1**

कोड नं.
Code No. **65/1/C**

रोल नं.
Roll No. | | | | | | | |

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें।
Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **26** प्रश्न हैं।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है। प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा। 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे।
- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **26** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) **सभी** प्रश्न **अनिवार्य** हैं।

(ii) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **26** प्रश्न हैं।

(iii) खण्ड अ के प्रश्न **1 - 6** तक अति लघु-उत्तर वाले प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **1** अंक निर्धारित है।

(iv) खण्ड ब के प्रश्न **7 - 19** तक दीर्घ-उत्तर **I** प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **4** अंक निर्धारित हैं।

(v) खण्ड स के प्रश्न **20 - 26** तक दीर्घ-उत्तर **II** प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **6** अंक निर्धारित हैं।

(vi) उत्तर लिखना प्रारम्भ करने से पहले कृपया प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखिए।

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are* ***compulsory****.*

(ii) *Please check that this question paper contains* ***26*** *questions.*

(iii) *Questions* ***1 - 6*** *in Section A are very short-answer type questions carrying* ***1*** *mark each.*

(iv) *Questions* ***7 - 19*** *in Section B are long-answer* ***I*** *type questions carrying* ***4*** *marks each.*

(v) *Questions* ***20 - 26*** *in Section C are long-answer* ***II*** *type questions carrying* ***6*** *marks each.*

(vi) *Please write down the serial number of the question before attempting it.*

खण्ड - अ

SECTION - A

प्रश्न संख्या 1 से 6 तक प्रत्येक प्रश्न का 1 अंक है।

Question numbers 1 to 6 carry 1 mark each.

1. यदि $x \in \text{N}$ और $\begin{vmatrix} x+3 & -2 \\ -3x & 2x \end{vmatrix} = 8$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

If $x \in \text{N}$ and $\begin{vmatrix} x+3 & -2 \\ -3x & 2x \end{vmatrix} = 8$, then find the value of x.

2. प्रारम्भिक स्तंभ संक्रिया $C_2 \to C_2 + 2C_1$ निम्न आव्यूह समीकरण पर लगाइए :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Use elementary column operation $C_2 \to C_2 + 2C_1$ in the following matrix equation :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. कोटि 2×2 के सभी सभंव आव्यूहों की संख्या, जिनका प्रत्येक अवयव 1, 2 अथवा 3 है, लिखिए।

Write the number of all possible matrices of order 2×2 with each entry 1, 2 or 3.

4. उस बिंदु का स्थिति सदिश लिखिए जो बिंदुओं, जिनके स्थिति सदिश $3\vec{a}-2\vec{b}$ तथा $2\vec{a}+3\vec{b}$ है, को मिलाने वाले रेखाखंड को 2 : 1 के अनुपात में बाँटता है।

Write the position vector of the point which divides the join of points with position vectors $3\vec{a}-2\vec{b}$ and $2\vec{a}+3\vec{b}$ in the ratio 2 : 1.

5. उन मात्रक सदिशों की संख्या लिखिए जो सदिशों $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $\vec{b}=\hat{j}+\hat{k}$ दोनों पर लंब हैं।

Write the number of vectors of unit length perpendicular to both the vectors $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ and $\vec{b}=\hat{j}+\hat{k}$.

6. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए, जो कि x, y और z-अक्ष पर क्रमश: 3, -4 और 2 अंत:खंड काटता है।

Find the vector equation of the plane with intercepts 3, -4 and 2 on x, y and z-axis respectively.

खण्ड - ब

SECTION - B

प्रश्न संख्या 7 से 19 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं।

Question numbers 7 to 19 carry 4 marks each.

7. उस बिंदु के निर्देशांक कीजिए जहाँ पर बिंदुओं A(3, 4, 1) और B(5, 1, 6) से होकर जाने वाली रेखा XZ समतल को प्रतिच्छेद करती है। वह कोण भी ज्ञात कीजिए जो यह रेखा XZ समतल के साथ बनाती है।

Find the coordinates of the point where the line through the points A(3, 4, 1) and B(5, 1, 6) crosses the XZ plane. Also find the angle which this line makes with the XZ plane.

8. एक समांतर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाएँ $2\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}$ और $2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ हैं। इसके दोनों विकर्णों के समांतर दो मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। विकर्णों के सदिशों का प्रयोग करके समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

The two adjacent sides of a parallelogram are $2\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}$ and $2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$. Find the two unit vectors parallel to its diagonals. Using the diagonal vectors, find the area of the parallelogram.

9. एक पासा फेंकने के खेल में एक व्यक्ति ₹ 5 जीतता है यदि उसे 4 से बड़ी संख्या प्राप्त होती है अन्यथा वह ₹ 1 हार जाता है। वह व्यक्ति 3 बार पासा फेंकने का निर्णय लेता है लेकिन चार से बड़ी संख्या प्राप्त करने पर खेल छोड़ देता है। मनुष्य द्वारा जीती/हारी जाने वाली राशि की प्रत्याशा ज्ञात कीजिए।

अथवा

एक थैले में 4 गेंदें हैं। यादृच्छया दो गेंदें बिना प्रतिस्थापना के निकाली गई और दोनों सफेद पाई गई। इसकी क्या प्रायिकता है कि थैले में सभी गेंदें सफेद हैं?

In a game, a man wins ₹ 5 for getting a number greater than 4 and loses ₹ 1 otherwise, when a fair die is thrown. The man decided to throw a die thrice but to quit as and when he gets a number greater than 4. Find the expected value of the amount he wins/loses.

OR

A bag contains 4 balls. Two balls are drawn at random (without replacement) and are found to be white. What is the probability that all balls in the bag are white ?

10. $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

अथवा

यदि $y = 2\cos(\log x) + 3\sin(\log x)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ है।

Differentiate $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$ with respect to x.

OR

If $y = 2\cos(\log x) + 3\sin(\log x)$, prove that $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$.

11. यदि $x = a\sin 2t(1 + \cos 2t)$ तथा $y = b\cos 2t(1 - \cos 2t)$ है, तो $t = \dfrac{\pi}{4}$ पर $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

If $x = a\sin 2t(1 + \cos 2t)$ and $y = b\cos 2t(1 - \cos 2t)$, find $\dfrac{dy}{dx}$ at $t = \dfrac{\pi}{4}$.

12. यदि वक्र $y^2 = ax^3 + b$ के बिंदु (2, 3) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y = 4x - 5$ है, तो a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।

The equation of tangent at (2, 3) on the curve $y^2 = ax^3 + b$ is $y = 4x - 5$. Find the values of a and b.

13. ज्ञात कीजिए : $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4 + x^2 - 2}\,dx$

Find : $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4 + x^2 - 2}\,dx$

14. मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} \, dx$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\frac{3}{2}} |x \cos \pi x| \, dx$

Evaluate : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} \, dx$

OR

Evaluate : $\int_0^{\frac{3}{2}} |x \cos \pi x| \, dx$

15. ज्ञात कीजिए : $\int (3x + 1)\sqrt{4 - 3x - 2x^2} \, dx$

Find : $\int (3x + 1)\sqrt{4 - 3x - 2x^2} \, dx$

16. अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$y + x\frac{dy}{dx} = x - y\frac{dy}{dx}$$

Solve the differential equation :

$$y + x\frac{dy}{dx} = x - y\frac{dy}{dx}$$

17. द्वितीय चतुर्थांश में ऐसे वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक अक्षों को स्पर्श करते हैं।

Form the differential equation of the family of circles in the second quadrant and touching the coordinate axes.

18. x के लिए हल कीजिए : $\sin^{-1}x + \sin^{-1}(1-x) = \cos^{-1}x$

अथवा

यदि $\cos^{-1}\frac{x}{a} + \cos^{-1}\frac{y}{b} = \alpha$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\alpha + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha$ है।

Solve the equation for x : $\sin^{-1}x + \sin^{-1}(1-x) = \cos^{-1}x$

OR

If $\cos^{-1}\frac{x}{a} + \cos^{-1}\frac{y}{b} = \alpha$, prove that $\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\alpha + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha$

19. एक ट्रस्ट ने दो प्रकार के बाण्ड (अनुबंध पत्र) में धन निवेशित किया। पहले बाण्ड में 10% ब्याज और दूसरे बाण्ड में 12% ब्याज मिलता है। ट्रस्ट को ₹ 2,800 कुल ब्याज प्राप्त हुआ। परन्तु यदि ट्रस्ट ने अदला-बदली करके बाण्डों में धन लगाया होता, तो उसे ₹ 100 कम ब्याज प्राप्त होता। आव्यूह विधि से ज्ञात कीजिए कि ट्रस्ट ने कितना धन निवेशित किया। प्राप्त ब्याज को हेल्पऐज इंडिया में दान किया जाएगा। इस प्रश्न में कौन-सा मूल्य दर्शाया गया है?

A trust invested some money in two type of bonds. The first bond pays 10% interest and second bond pays 12% interest. The trust received ₹ 2,800 as interest. However, if trust had interchanged money in bonds, they would have got ₹ 100 less as interest. Using matrix method, find the amount invested by the trust. Interest received on this amount will be given to Helpage India as donation. Which value is reflected in this question ?

खण्ड – स

SECTION - C

प्रश्न संख्या 20 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं।

Question numbers 20 to 26 carry 6 marks each.

20. दो प्रकार के खाद 'A' और 'B' हैं। 'A' में 12% नाइट्रोजन और 5% फास्फोरिक एसिड है जबकि 'B' में 4% नाइट्रोजन और 5% फास्फोरिक एसिड है। मिट्टी के स्थिति परीक्षण के बाद किसान को ज्ञात हुआ कि उसे फसल के लिए कम से कम 12 कि.ग्रा. नाइट्रोजन और 12 कि.ग्रा. फास्फोरिक एसिड की आवश्यकता है। यदि 'A' का मूल्य ₹ 10 प्रति कि.ग्रा. और 'B' का मूल्य ₹ 8 प्रति कि.ग्रा. है तो आलेख द्वारा परिकलित कीजिए कि उसे प्रत्येक प्रकार की कितनी खाद प्रयोग करनी चाहिए कि कम से कम कीमत में पोषक तत्वों की आवश्यकता पूरी हो जाए।

There are two types of fertilisers 'A' and 'B'. 'A' consists of 12% nitrogen and 5% phosphoric acid whereas 'B' consists of 4% nitrogen and 5% phosphoric acid. After testing the soil conditions, farmer finds that he needs at least 12 kg of nitrogen and 12 kg of phosphoric acid for his crops. If 'A' costs ₹ 10 per kg and 'B' cost ₹ 8 per kg, then graphically determine how much of each type of fertiliser should be used so that nutrient requirements are met at a minimum cost.

21. 20 अच्छे संतरों में 5 खराब संतरे अप्रत्याशित कारण से मिल गए हैं। चार संतरे उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना के सहित निकाले गए, तो खराब संतरों को निकालने की संख्या का प्रायकिता बंटन ज्ञात कीजिए। बंटन का माध्य तथा प्रसरण भी ज्ञात कीजिए।

Five bad oranges are accidently mixed with 20 good ones. If four oranges are drawn one by one successively with replacement, then find the probability distribution of number of bad oranges drawn. Hence find the mean and variance of the distribution.

22. बिंदु P, जिसका स्थिति सदिश $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ है से समतल $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) - 26 = 0$ पर खींचे गए लम्ब के पाद का स्थिति सदिश तथा लम्बवत् दूरी ज्ञात कीजिए। तल में P का प्रतिबिम्ब भी ज्ञात कीजिए।

Find the position vector of the foot of perpendicular and the perpendicular distance from the point P with position vector $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ to the plane $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) - 26 = 0$. Also find image of P in the plane.

23. दर्शाइए कि एक द्विआधारी संक्रिया जो $A = \mathbf{R} - \{-1\}$ पर सभी a, b $\in$ A के लिए $a*b = a + b + ab$ द्वारा परिभाषित है क्रम विनिमेय तथा साहर्चय है। A में * का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि A का प्रत्येक अवयव व्युत्क्रमणीय है।

Show that the binary operation * on $A = \mathbf{R} - \{-1\}$ defined as $a*b = a + b + ab$ for all a, b $\in$ A is commutative and associative on A. Also find the identity element of * in A and prove that every element of A is invertible.

24. सिद्ध कीजिए कि समद्विबाहु त्रिभुज, जिसमें r त्रिज्या का एक अंतवृत खींचा गया है, का न्यूनतम परिमाप $6\sqrt{3}\,r$ है।

अथवा

यदि एक समकोण त्रिभुज में कर्ण तथा एक भुजा का योग दिया गया हो, तो दर्शाइए कि त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिकतम होगा जबकि उनके बीच का कोण $\frac{\pi}{3}$ होगा।

Prove that the least perimeter of an isosceles triangle in which a circle of radius r can be inscribed is $6\sqrt{3}\,r$.

OR

If the sum of lengths of hypotenuse and a side of a right angled triangle is given, show that area of triangle is maximum, when the angle between them is $\frac{\pi}{3}$.

25. सिद्ध कीजिए कि वक्र $y^2 = 4x$ और $x^2 = 4y$, उस वर्ग के क्षेत्रफल को तीन बराबर भागों में बाँटते हैं जो कि रेखाओं $x = 0$, $x = 4$, $y = 4$ और $y = 0$ द्वारा परिबद्ध है।

Prove that the curves $y^2 = 4x$ and $x^2 = 4y$ divide the area of square bounded by $x = 0$, $x = 4$, $y = 4$ and $y = 0$ into three equal parts.

26. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर सिद्ध कीजिए कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है यदि

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\cos A & 1+\cos B & 1+\cos C \\ \cos^2 A+\cos A & \cos^2 B+\cos B & \cos^2 C+\cos C \end{vmatrix} = 0 \text{ है।}$$

अथवा

एक दुकानदार के पास तीन विभिन्न प्रकार के पेन 'A', 'B' और 'C' हैं। मीनू ने प्रत्येक प्रकार का एक-एक पेन कुल ₹ 21 में खरीदा। जीवन ने 'A' प्रकार के 4 पेन, 'B' प्रकार के 3 पेन और 'C' प्रकार के 2 पेन ₹ 60 में खरीदे जबकि शिखा ने 'A' प्रकार के 6 पेन, 'B' प्रकार के 2 पेन और 'C' प्रकार के 3 पेन ₹ 70 में खरीदे। आव्यूह विधि से प्रत्येक प्रकार के पेन का मूल्य ज्ञात कीजिए।

Using properties of determinants, show that ΔABC is isosceles if :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\cos A & 1+\cos B & 1+\cos C \\ \cos^2 A+\cos A & \cos^2 B+\cos B & \cos^2 C+\cos C \end{vmatrix} = 0$$

OR

A shopkeeper has 3 varieties of pens 'A', 'B' and 'C'. Meenu purchased 1 pen of each variety for a total of ₹ 21. Jeevan purchased 4 pens of 'A' variety, 3 pens of 'B' variety and 2 pens of 'C' variety for ₹ 60. While Shikha purchased 6 pens of 'A' variety, 2 pens of 'B' variety and 3 pens of 'C' variety for ₹ 70. Using matrix method, find cost of each variety of pen.